

Article

Über die formale Beziehung des Riemannsches Krümmungstensors zu den Feldgleichungen der Gravitation

Einstein, A.

in: *Mathematische Annalen* - 97 | Periodical

5 page(s) (99 - 103)

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: info@digizeitschriften.de

Über die formale Beziehung des Riemannschen Krümmungstensors zu den Feldgleichungen der Gravitation.

Von
A. Einstein in Berlin.

Die Feldgleichungen der Gravitation werden gewöhnlich in der Form geschrieben

$$(1) \quad R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R = -k T_{im},$$

wobei T_{im} den Energietensor der Materie und des elektromagnetischen Feldes bedeutet. Die physikalische Begründung für das zweite Glied der linken Seite liegt darin, daß es bewirkt, daß die Divergenz der linken Seite identisch verschwindet. Dies erscheint notwendig für die Deutung des Energiesatzes der Materie. Es ist ferner wohlbekannt, daß die Variation des Integrals des Krümmungsskalars nach den $g_{\mu\nu}$ nicht den Tensor R_{im} , sondern den Tensor $R_{im} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ liefert. Endlich hat Herglotz gezeigt, daß dieser Tensor eine einfache mathematische Bedeutung besitzt: Ist (ξ^i) eine beliebige Richtung, so ist $R_{ik} \xi^i \xi^k$ der Krümmungsskalar des auf (ξ^i) senkrechten dreidimensionalen Schnittes des vierdimensionalen Kontinuums.

Andererseits aber lassen sich gewichtige Gründe dafür anführen, daß

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R$$

in Wahrheit derjenige Tensor sei, welcher bei tieferer Erfassung des Gravitationsgesetzes maßgebende Bedeutung besitzt. Will man nämlich dem Grundgedanken der Relativität voll gerecht werden, so wird man dazu gedrängt, die raumartigen Schnitte der Welt als endlich anzunehmen, was auch notwendig wird, wenn man der Materie in der Welt eine endliche mittlere Dichte zuschreiben will. Man kann diesen Bedingungen gerecht

werden durch Einführung des sog. kosmologischen Gliedes, so daß an die Stelle von (1) die Gleichung

$$(2) \quad R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R - \frac{1}{2} g_{im} \lambda = -k T_{im},$$

welches Gleichungssystem nach Elimination von λ die Form annimmt

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R = -k \left(T_{im} - \frac{1}{4} g_{im} T \right).$$

Wenn man die Annahme einführt, daß Gravitationsfeld und elektromagnetisches Feld die einzigen realen Gegenstände der Physik seien, und annimmt, daß der Maxwell'sche Tensor

$$(3) \quad T_{im} = \frac{1}{4} g_{im} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{ia} \varphi_m^a$$

in die Gleichungen (3) einzusetzen sei, so verschwindet der Skalar T identisch, so daß die Feldgleichungen die Gestalt annehmen

$$(2a) \quad R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R = -k T_{im}.$$

Es ist klar, daß die Gleichungen (2a) in dem Falle, daß auf der rechten Seite lediglich der Tensor (3) steht, den Gleichungen (1) vorzuziehen sind. Denn letztere haben die Gleichung $R = 0$ zur Folge, deren allgemeine Gültigkeit unwahrscheinlich ist. Ferner gestatten die Gleichungen (2a), nicht aber die Gleichungen (1), die Existenz von Elektronen mit stetig verteilter Ladung¹⁾.

Daß die Gleichungen (2a) noch wenig Beachtung gefunden haben, liegt an zwei Umständen. *Erstens* nämlich waren unser aller Bestrebungen darauf gerichtet, auf dem von Weyl und Eddington eingeschlagenen oder einem ähnlichen Wege zu einer Theorie zu gelangen, die das Gravitationsfeld und das elektromagnetische Feld zu einer formalen Einheit verschmilzt; *durch mannigfache Mißerfolge habe ich mich aber nun zu der Überzeugung durchgerungen, daß man auf diesem Wege der Wahrheit nicht näher kommt.* *Zweitens* scheint die Zusammenstellung $R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R$ vom mathematischen Standpunkte aus unnatürlich; dies Bedenken hoffe ich durch die nachfolgenden Betrachtungen zerstreuen zu können.

Wie Herr Rainich²⁾ in einer interessanten Notiz gezeigt hat, läßt sich in einem Kontinuum von vier Dimensionen der Riemannsche Krümmungstensor R_{iklm} in zwei Teile von verschiedenen Symmetrieeigenschaften zerlegen. Zu jedem Flächenelement (f^{ik}) im Punkte P gehört ein dazu

¹⁾ Spätere Untersuchungen haben mir leider gezeigt, daß man auf diese Weise nicht zu einer befriedigenden Theorie der Elektronen geführt wird.

²⁾ G. Y. Rainich, Nature Nr. 2892, 115 (1925), S. 498.

senkrechtes $(\overline{f^{ik}})$. Wir zerlegen nun den Krümmungstensor $R_{ik,lm}$ gemäß der Formel

$$(4) \quad R_{ik,lm} = S_{ik,lm} + A_{ik,lm}$$

in zwei Summanden derart, daß der Anteil $S_{ik,lm}$ in den Flächenelementen (f^{ik}) und $(\overline{f^{ik}})$ gleiche Flächenkrümmung, der Anteil $A_{ik,lm}$ entgegengesetzt gleiche Flächenkrümmung liefert. Setzt man der Kürze halber

$$(5a) \quad (g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})f^{ik}f^{lm} = (g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})\overline{f^{ik}}\overline{f^{lm}} = 1,$$

so bedeutet dies, daß für jede Wahl des Flächenelementes die Gleichungen

$$(5b) \quad \begin{cases} S_{ik,lm}f^{ik}f^{lm} = S_{ik,lm}\overline{f^{ik}}\overline{f^{lm}} \\ A_{ik,lm}f^{ik}f^{lm} = -A_{ik,lm}\overline{f^{ik}}\overline{f^{lm}} \end{cases}$$

erfüllt sein sollen. Durch diese Bedingungen ist die Zerlegung vollkommen bestimmt.

Es erweist sich nun, daß der „antisymmetrische“ Bestandteil $A_{ik,lm}$ mit dem Tensor $R_{ik} - \frac{1}{4}g_{ik}R$ eng zusammenhängt, derart, daß das Verschwinden des einen das Verschwinden des andern zur Folge hat und umgekehrt. Es ist nämlich

$$(6) \quad A_{ik,lm} = -\frac{1}{2}(g_{il}G_{km} + g_{km}G_{il} - g_{im}G_{kl} - g_{kl}G_{im}),$$

wobei zur Abkürzung

$$(7) \quad G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{4}g_{ik}R$$

gesetzt ist.

Zum Beweise führen wir zunächst den Tensor ein

$$(8) \quad \Delta_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{\alpha\beta\sigma\tau} g_{\sigma i} g_{\tau k} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \delta_{ik\sigma\tau} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta};$$

dabei bedeutet δ^{iklm} bzw. δ_{iklm} die Werte ± 1 , je nachdem $iklm$ eine gerade oder ungerade Permutation von $(1, 2, 3, 4)$ ist. Dann ist

$$(9) \quad \overline{f^{ik}} = \Delta_{\alpha\beta}^{ik} f^{\alpha\beta},$$

denn es ist leicht zu beweisen, daß dann den Gleichungen (5a) sowie der Gleichung

$$(10) \quad (g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl})f^{ik}\overline{f^{lm}} = 0$$

Genüge geleistet ist. Wir führen ferner die Bezeichnung ein

$$(11) \quad R_{\overline{ik},\overline{lm}} = \Delta_{ik}^{\lambda\rho} \Delta_{lm}^{\sigma\tau} R_{\lambda\rho,\sigma\tau},$$

analog für die Tensoren $S_{ik,lm}$ und $A_{ik,lm}$. Multiplizieren wir (4) mit $\overline{f^{ik} f^{lm}}$, so erhält man auf Grund von (11):

$$(12) \quad R_{\overline{ik}, \overline{lm}} = S_{\overline{ik}, \overline{lm}} + A_{\overline{ik}, \overline{lm}},$$

während die Beziehungen (5 b) auf Grund von (9) und (11) die Form annehmen

$$(13) \quad \begin{cases} S_{i^{\lambda}, lm} = S_{\overline{i}, \overline{lm}}, \\ A_{ik, lm} = -A_{\overline{ik}, \overline{lm}}. \end{cases}$$

Aus (4), (12) und (13) ergibt sich

$$(14) \quad \begin{cases} S_{ik, lm} = \frac{1}{2}(R_{ik, lm} + R_{\overline{ik}, \overline{lm}}), \\ A_{ik, lm} = \frac{1}{2}(R_{ik, lm} - R_{\overline{ik}, \overline{lm}}). \end{cases}$$

Für die weitere Rechnung ist es bequem, ein lokales Koordinatensystem zu gebrauchen, für welches $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ($\delta_{\mu\mu} = 1$, $\delta_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$). Dann erhält man an Stelle von (8) einfacher

$$(8a) \quad \Delta_{ik}^{\alpha\beta} = \delta_{ik\alpha\beta}.$$

In diesem System gilt gemäß (11) und (14) und (7)

$$\begin{aligned} R_{12,34} - R_{\overline{12}, \overline{34}} &= R_{12,34} - R_{34,12} = 0, \\ R_{12,23} - R_{\overline{12}, \overline{23}} &= R_{12,23} - R_{34,14} = R_{12,23} + R_{14,43} = R_{13} = G_{13}, \\ R_{12,21} - R_{\overline{12}, \overline{21}} &= R_{\overline{12}, \overline{21}} - R_{34,43} = R_{11} + R_{22} - \frac{1}{2}R = G_{11} + G_{22} \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Die übrigen Komponenten von S_{iklm} erhält man hieraus durch Vertauschung der Indizes. Man verifiziert nun Gleichung (6) für die hingeschriebenen Komponenten und das gewählte lokale Koordinatensystem; sie ist also auch allgemein gültig.

Aus (6) kann man leicht schließen, daß die Bedingungen

$$A_{ik, lm} = 0$$

und

$$G_{im} = 0 = R_{im} - \frac{1}{4}g_{im} R$$

gleichwertig sind. Das Gesetz des reinen Gravitationsfeldes im Sinne der Gleichungen (2a) wird also durch die Bedingung bestimmt, daß der im Sinne von Rainich gebildete asymmetrische Bestandteil des Riemannschen Krümmungstensors verschwindet.

Aber auch das allgemeine Gleichungssystem (2a), (3) kann aus einer ganz analogen Betrachtung gewonnen werden. Man bilde aus dem elektromagnetischen Tensor (φ_{ik}) den Tensor

$$(15) \quad E_{ik, lm} = \frac{2}{3} \left[\varphi_{ik} \varphi_{lm} + \frac{1}{2} (\varphi_{il} \varphi_{km} - \varphi_{im} \varphi_{kl}) \right],$$

dessen Symmetrieeigenschaften dieselben sind wie die des Riemannschen Krümmungstensors. Man bilde ferner den „elektromagnetisch ergänzten Krümmungstensor“

$$(16) \quad R_{ik,lm}^* = R_{ik,lm} + k E_{ik,lm}$$

und verlange, daß der im Sinne von Rainich gebildete antisymmetrische Bestandteil $A_{ik,lm}^*$ von $R_{ik,lm}^*$ verschwinde:

$$(17) \quad A_{ik,lm}^* = \frac{1}{2}(R_{ik,lm}^* - R_{ik,lm}^*) = 0.$$

Genau wie oben beweist man, daß diese Bedingung mit dem Gleichungssystem

$$(18) \quad G_{im}^* = R_{im}^* - \frac{1}{4} g_{im} R^* = 0$$

äquivalent ist, welches mit (2a), (3) übereinstimmt.

Dadurch ist gezeigt, daß die durch das kosmologische Problem und durch den Bau des elektromagnetischen Energietensors nahegelegten Gleichungen (2a) des Gravitationsfeldes eine einfache mathematische Interpretation zulassen.

(Eingegangen am 9. 1. 1926.)