Über die formale Beziehung des Riemannschen Krümmnngstensors zu den Feldgleichungen der Gravitation

Einstein, A.

in: Mathematische Annalen - 97 | Periodical
5 page(s) (99 - 103)

Über die formale Beziehung des Riemannschen Krümmungstensors zu den Feldgleichungen der Gravitation.

Von

A. Einstein in Berlin.

Die Feldgleichungen der Gravitation werden gewöhnlich in der Form geschrieben

$$R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R = - k T_{im}, \tag{1}$$

wobei T_{im} den Energietensor der Materie und des elektromagnetischen Feldes bedeutet. Die physikalische Begründung für das zweite Glied der linken Seite liegt darin, daß es bewirkt, daß die Divergenz der linken Seite identisch verschwindet. Dies erscheint notwendig für die Deutung des Energiesatzes der Materie. Es ist ferner wohlbekannt, daß die Variation des Integrals des Krümmungsskalars nach den $g_{\mu\nu}$ nicht den Tensor R_{im}, sondern den Tensor $R_{im} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ liefert. Endlich hat Herglotz gezeigt, daß dieser Tensor eine einfache mathematische Bedeutung besitzt: Ist (ξ^i) eine beliebige Richtung, so ist $R_{ik} \xi^i \xi^k$ der Krümmungsskalar des auf (ξ^i) senkrechten dreidimensionalen Schnittes des vierdimensionalen Kontinuums.

Andererseits aber lassen sich gewichtige Gründe dafür anführen, daß

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R$$

in Wahrheit derjenige Tensor sei, welcher bei tieferer Erfassung des Gravitationsgesetzes maßgebende Bedeutung besitzt. Will man nämlich dem Grundgedanken der Relativität voll gerecht werden, so wird man dazu gedrängt, die raumartigen Schnitte der Welt als endlich anzunehmen, was auch notwendig wird, wenn man der Materie in der Welt eine endliche mittlere Dichte zuschreiben will. Man kann diesen Bedingungen gerecht werden durch Einführung des sog. kosmologischen Gliedes, so daß an die Stelle von (1) die Gleichung

$$R_{im} - \frac{1}{2} g_{im} R - \frac{1}{2} g_{im} \lambda = - k T_{im}, \tag{2}$$

welches Gleichungssystem nach Elimination von λ die Form annimmt

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R = - k \left(T_{im} - \frac{1}{4} g_{im} T \right).$$

Wenn man die Annahme einführt, daß Gravitationsfeld und elektromagnetisches Feld die einzigen realen Gegenstände der Physik seien, und annimmt, daß der Maxwellsche Tensor

$$T_{im} = \frac{1}{4} g_{im} \varphi_{\alpha\beta} \varphi^{\alpha\beta} - \varphi_{i\alpha} \varphi_m^{\alpha} \tag{3}$$

in die Gleichungen (3) einzusetzen sei, so verschwindet der Skalar T identisch, so daß die Feldgleichungen die Gestalt annehmen

$$R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R = - k T_{im}. \tag{2a}$$

Es ist klar, daß die Gleichungen (2a) in dem Falle, daß auf der rechten Seite lediglich der Tensor (3) steht, den Gleichungen (1) vorzuziehen sind. Denn letztere haben die Gleichung $R = 0$ zur Folge, deren allgemeine Gültigkeit unwahrscheinlich ist. Ferner gestatten die Gleichungen (2a), nicht aber die Gleichungen (1), die Existenz von Elektronen mit stetig verteilter Ladung[1]).

Daß die Gleichungen (2a) noch wenig Beachtung gefunden haben, liegt an zwei Umständen. *Erstens* nämlich waren unser aller Bestrebungen darauf gerichtet, auf dem von Weyl und Eddington eingeschlagenen oder einem ähnlichen Wege zu einer Theorie zu gelangen, die das Gravitationsfeld und das elektromagnetische Feld zu einer formalen Einheit verschmilzt; *durch mannigfache Mißerfolge habe ich mich aber nun zu der Überzeugung durchgerungen, daß man auf diesem Wege der Wahrheit nicht näher kommt. Zweitens* scheint die Zusammenstellung $R_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R$ vom mathematischen Standpunkte aus unnatürlich; dies Bedenken hoffe ich durch die nachfolgenden Betrachtungen zerstreuen zu können.

Wie Herr Rainich[2]) in einer interessanten Notiz gezeigt hat, läßt sich in einem Kontinuum von vier Dimensionen der Riemannsche Krümmungstensor $R_{ik,lm}$ in zwei Teile von verschiedenen Symmetrieeigenschaften zerlegen. Zu jedem Flächenelement (f^{ik}) im Punkte P gehört ein dazu

[1]) Spätere Untersuchungen haben mir leider gezeigt, daß man auf diese Weise nicht zu einer befriedigenden Theorie der Elektronen geführt wird.

[2]) G. Y. Rainich, Nature Nr. 2892, **115** (1925), S. 498.

senkrechtes $(\overline{f^{ik}})$. Wir zerlegen nun den Krümmungstensor $R_{ik,lm}$ gemäß der Formel

$$R_{ik,lm} = S_{ik,lm} + A_{ik,lm} \tag{4}$$

in zwei Summanden derart, daß der Anteil $S_{ik,lm}$ in den Flächenelementen (f^{ik}) und $(\overline{f^{ik}})$ gleiche Flächenkrümmung, der Anteil $A_{ik,lm}$ entgegengesetzt gleiche Flächenkrümmung liefert. Setzt man der Kürze halber

$$(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) f^{ik} f^{lm} = (g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) \overline{f^{ik}}\, \overline{f^{lm}} = 1, \tag{5a}$$

so bedeutet dies, daß für jede Wahl des Flächenelementes die Gleichungen

$$\begin{cases} S_{ik,lm} f^{ik} f^{lm} = S_{ik,lm} \overline{f^{ik}}\, \overline{f^{lm}} \\ A_{ik,lm} f^{ik} f^{lm} = -A_{ik,lm} \overline{f^{ik}}\, \overline{f^{lm}} \end{cases} \tag{5b}$$

erfüllt sein sollen. Durch diese Bedingungen ist die Zerlegung vollkommen bestimmt.

Es erweist sich nun, daß der „antisymmetrische" Bestandteil $A_{ik,lm}$ mit dem Tensor $R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R$ eng zusammenhängt, derart, daß das Verschwinden des einen das Verschwinden des andern zur Folge hat und umgekehrt. Es ist nämlich

$$A_{ik,lm} = -\frac{1}{2}(g_{il}G_{km} + g_{km}G_{il} - g_{im}G_{kl} - g_{kl}G_{im}), \tag{6}$$

wobei zur Abkürzung

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R \tag{7}$$

gesetzt ist.

Zum Beweise führen wir zunächst den Tensor ein

$$\Delta_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g}}\, \delta^{\alpha\beta\sigma\tau} g_{\sigma i} g_{\tau k} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, \delta_{ik\sigma\tau} g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta}; \tag{8}$$

dabei bedeutet δ^{iklm} bzw. δ_{iklm} die Werte ± 1, je nachdem $iklm$ eine gerade oder ungerade Permutation von $(1, 2, 3, 4)$ ist. Dann ist

$$\overline{f^{ik}} = \Delta_{\alpha\beta}^{ik} f^{\alpha\beta}, \tag{9}$$

denn es ist leicht zu beweisen, daß dann den Gleichungen (5a) sowie der Gleichung

$$(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}) f^{ik} \overline{f^{lm}} = 0 \tag{10}$$

Genüge geleistet ist. Wir führen ferner die Bezeichnung ein

$$R_{\overline{ik},\overline{lm}} = \Delta_{ik}^{\lambda\varrho} \Delta_{lm}^{\sigma\tau} R_{\lambda\varrho,\sigma\tau}, \tag{11}$$

analog für die Tensoren $S_{ik,lm}$ und $A_{ik,lm}$. Multiplizieren wir (4) mit $\overline{f^{ik}f^{lm}}$, so erhält man auf Grund von (11):

$$R_{\overline{ik},\overline{lm}} = S_{\overline{ik},\overline{lm}} + A_{\overline{ik},\overline{lm}}, \tag{12}$$

während die Beziehungen (5b) auf Grund von (9) und (11) die Form annehmen

$$\begin{cases} S_{ik,lm} = S_{\overline{ik},\overline{lm}}, \\ A_{ik,lm} = -A_{\overline{ik},\overline{lm}}. \end{cases} \tag{13}$$

Aus (4), (12) und (13) ergibt sich

$$\begin{cases} S_{ik,lm} = \frac{1}{2}(R_{ik,lm} + R_{\overline{ik},\overline{lm}}), \\ A_{ik,lm} = \frac{1}{2}(R_{ik,lm} - R_{\overline{ik},\overline{lm}}). \end{cases} \tag{14}$$

Für die weitere Rechnung ist es bequem, ein lokales Koordinatensystem zu gebrauchen, für welches $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ ($\delta_{\mu\mu} = 1$, $\delta_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$). Dann erhält man an Stelle von (8) einfacher

$$\Delta_{ik}^{\alpha\beta} = \delta_{ik\alpha\beta}. \tag{8a}$$

In diesem System gilt gemäß (11) und (14) und (7)

$$R_{12,34} - R_{\overline{12},\overline{34}} = R_{12,34} - R_{34,12} = 0,$$
$$R_{12,23} - R_{\overline{12},\overline{23}} = R_{12,23} - R_{34,14} = R_{12,23} + R_{14,43} = R_{13} = G_{13},$$
$$R_{12,21} - R_{\overline{12},\overline{21}} = R_{\overline{12},\overline{21}} - R_{34,43} = R_{11} + R_{22} - \frac{1}{2}R = G_{11} + G_{22}$$

usw.

Die übrigen Komponenten von S_{iklm} erhält man hieraus durch Vertauschung der Indizes. Man verifiziert nun Gleichung (6) für die hingeschriebenen Komponenten und das gewählte lokale Koordinatensystem; sie ist also auch allgemein gültig.

Aus (6) kann man leicht schließen, daß die Bedingungen

$$A_{ik,lm} = 0$$

und

$$G_{im} = 0 = R_{im} - \frac{1}{4}g_{im}R$$

gleichwertig sind. Das Gesetz des reinen Gravitationsfeldes im Sinne der Gleichungen (2a) wird also durch die Bedingung bestimmt, daß der im Sinne von Rainich gebildete asymmetrische Bestandteil des Riemannschen Krümmungstensors verschwindet.

Aber auch das allgemeine Gleichungssystem (2a), (3) kann aus einer ganz analogen Betrachtung gewonnen werden. Man bilde aus dem elektromagnetischen Tensor (φ_{ik}) den Tensor

$$E_{ik,lm} = \frac{2}{3}\left[\varphi_{ik}\varphi_{lm} + \frac{1}{2}(\varphi_{il}\varphi_{km} - \varphi_{im}\varphi_{kl})\right], \tag{15}$$

dessen Symmetrieeigenschaften dieselben sind wie die des Riemannschen Krümmungstensors. Man bilde ferner den „elektromagnetisch ergänzten Krümmungstensor“

$$R^*_{ik,lm} = R_{ik,lm} + k\, E_{ik,lm} \tag{16}$$

und verlange, daß der im Sinne von Rainich gebildete antisymmetrische Bestandteil $A^*_{ik,lm}$ von $R^*_{ik,lm}$ verschwinde:

$$A^*_{ik,lm} = \frac{1}{2}\left(R^*_{ik,lm} - R^*_{\overline{ik},\overline{lm}}\right) = 0\,. \tag{17}$$

Genau wie oben beweist man, daß diese Bedingung mit dem Gleichungssystem

$$G^*_{im} = R^*_{im} - \frac{1}{4} g_{im} R^* = 0 \tag{18}$$

äquivalent ist, welches mit (2a), (3) übereinstimmt.

Dadurch ist gezeigt, daß die durch das kosmologische Problem und durch den Bau des elektromagnetischen Energietensors nahegelegten Gleichungen (2a) *des Gravitationsfeldes eine einfache mathematische Interpretation zulassen.*

(Eingegangen am 9. 1. 1926.)